

Микромагнетизм планарных наноэлементов

Константин Л. Метлов

17 марта 2016 г.

Магнетизм

Магниты

Опилки

Bitter

Bitter

Bitter

Домены

Границы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Магнетизм

Магнетизм

Магниты

Опилки

Bitter

Bitter

Bitter

Домены

Границы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

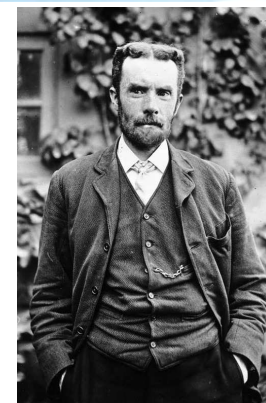
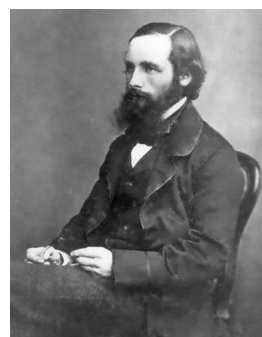
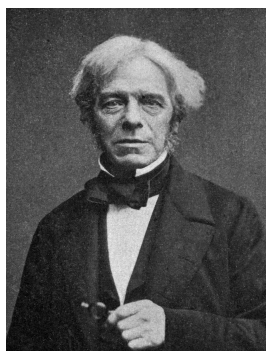
Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Магниты

Опилки

Bitter

Bitter

Bitter

Домены

Границы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

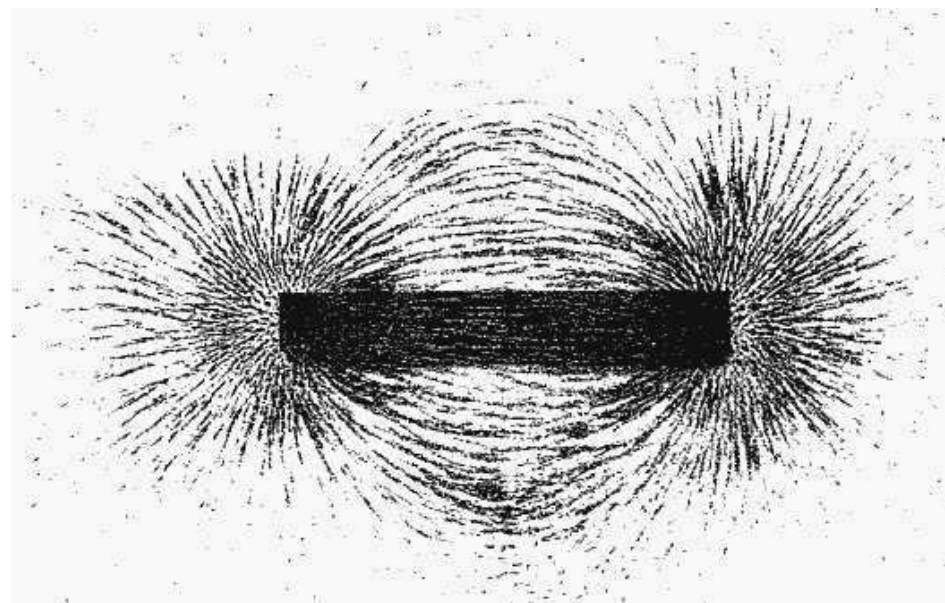
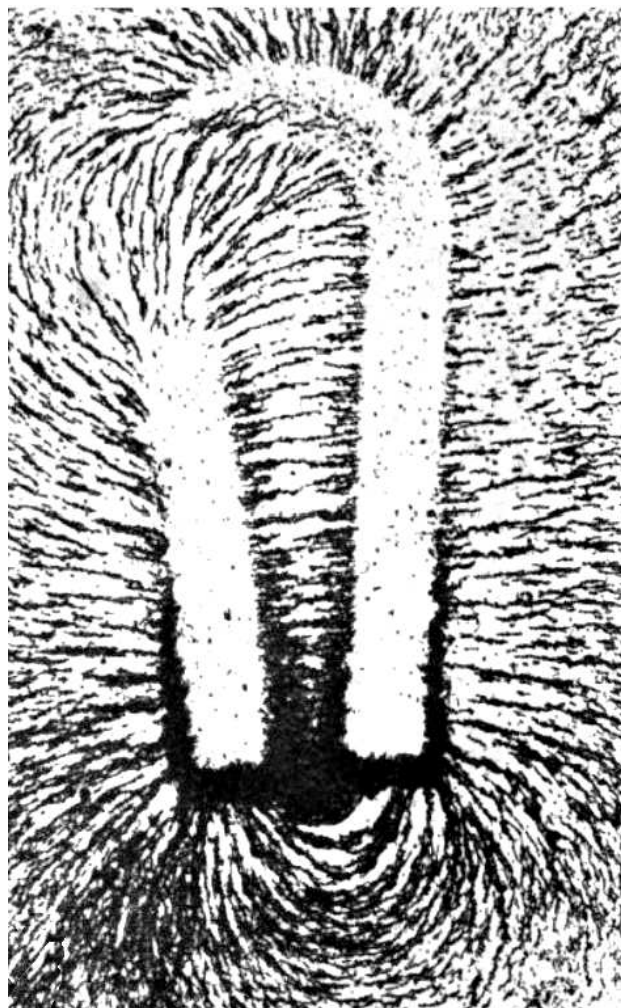
Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы



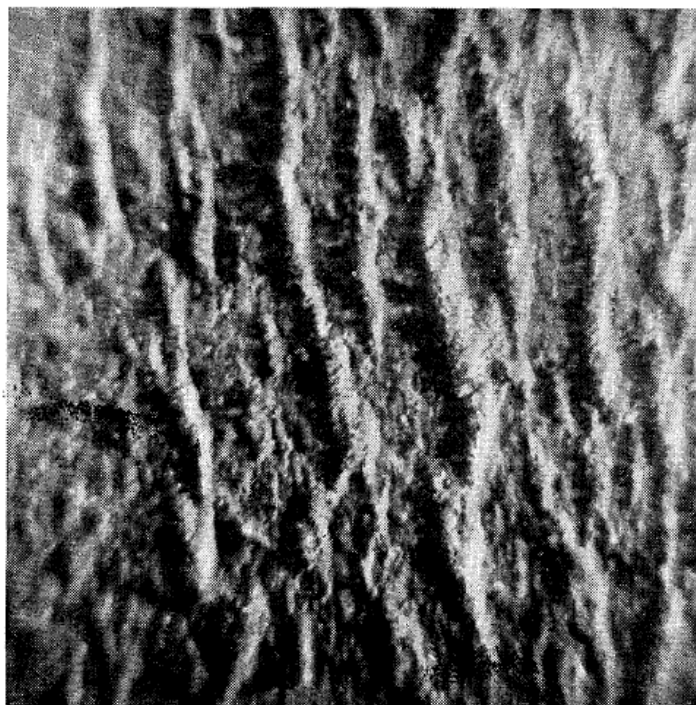
МагнетизмМагнитыОпилкиBitterBitterBitterДоменыГраницыМикромагнетизмНано-магнетизмНано-элементыНано-магнетизмПримерыДинамикаMagnetism@homeВыводы

Fig. 1. Patterns obtained on an iron-silicon alloy in large fields. Magnification $\times 16$.



Fig. 5. Pattern obtained on the same grain as that shown in Fig. 4, but at a slightly higher magnetization. Magnification $\times 16$.

In all figures the magnetic field is in this \rightarrow direction.

F. Bitter, Phys. Rev. 38, 1903 (1931)

Магнетизм

Магниты

Опилки

Bitter

Bitter

Bitter

Домены

Границы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

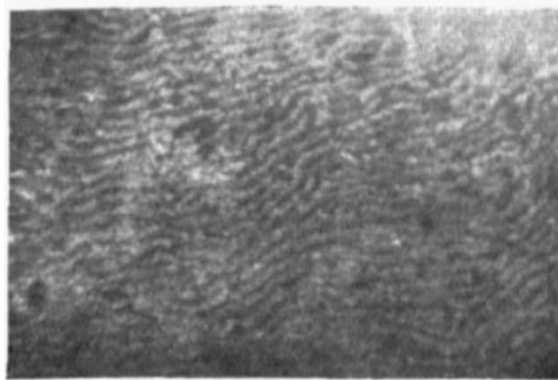
Нано-магнетизм

Примеры

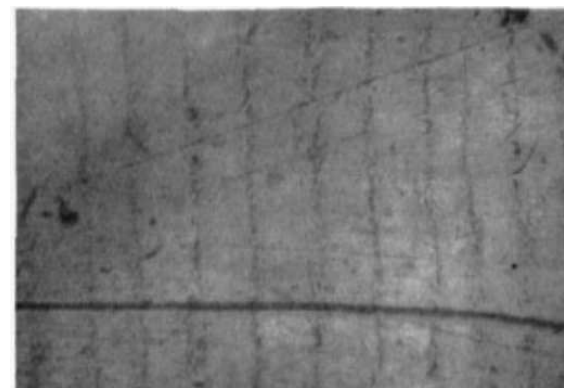
Динамика

Magnetism@home

Выводы



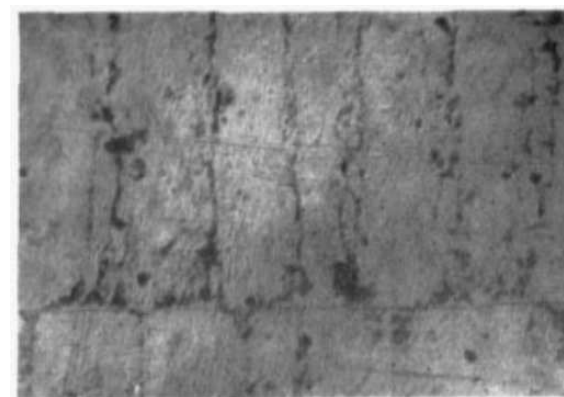
(a) Maze pattern found after electrolytic polishing but before annealing.



(c) (111) plane.
Field 25.0 oersteds→



(e) Complicated closure pattern on side of crystal, i.e. (112) plane.
Field parallel to [110] direction→



(f) Pattern on (112) plane showing branching at grain boundary.

L.F. Bates, G.W. Wilson, Proc. Phys. Soc. A 64 691 (1951)

Магнетизм

Магниты

Опилки

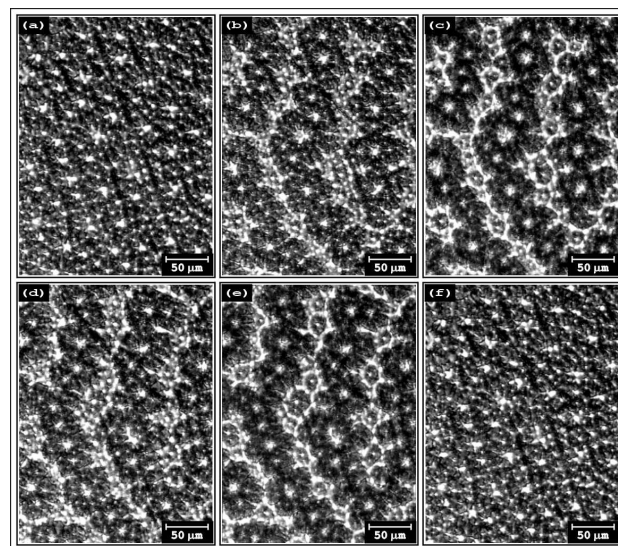
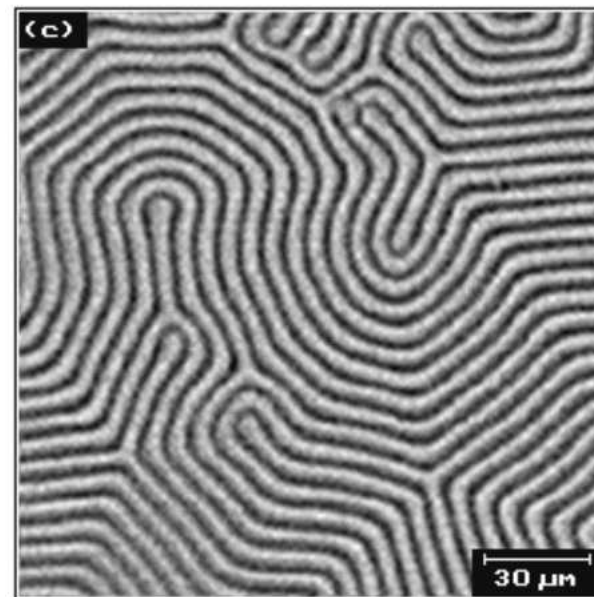
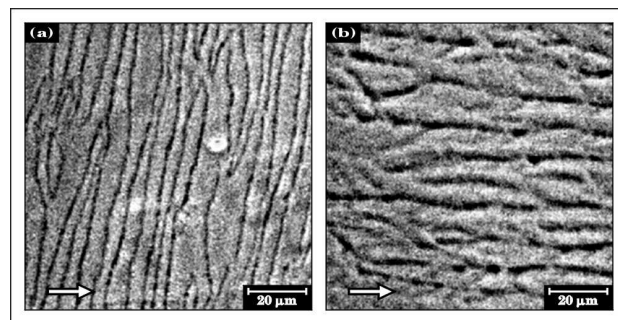
Bitter

Bitter

Bitter

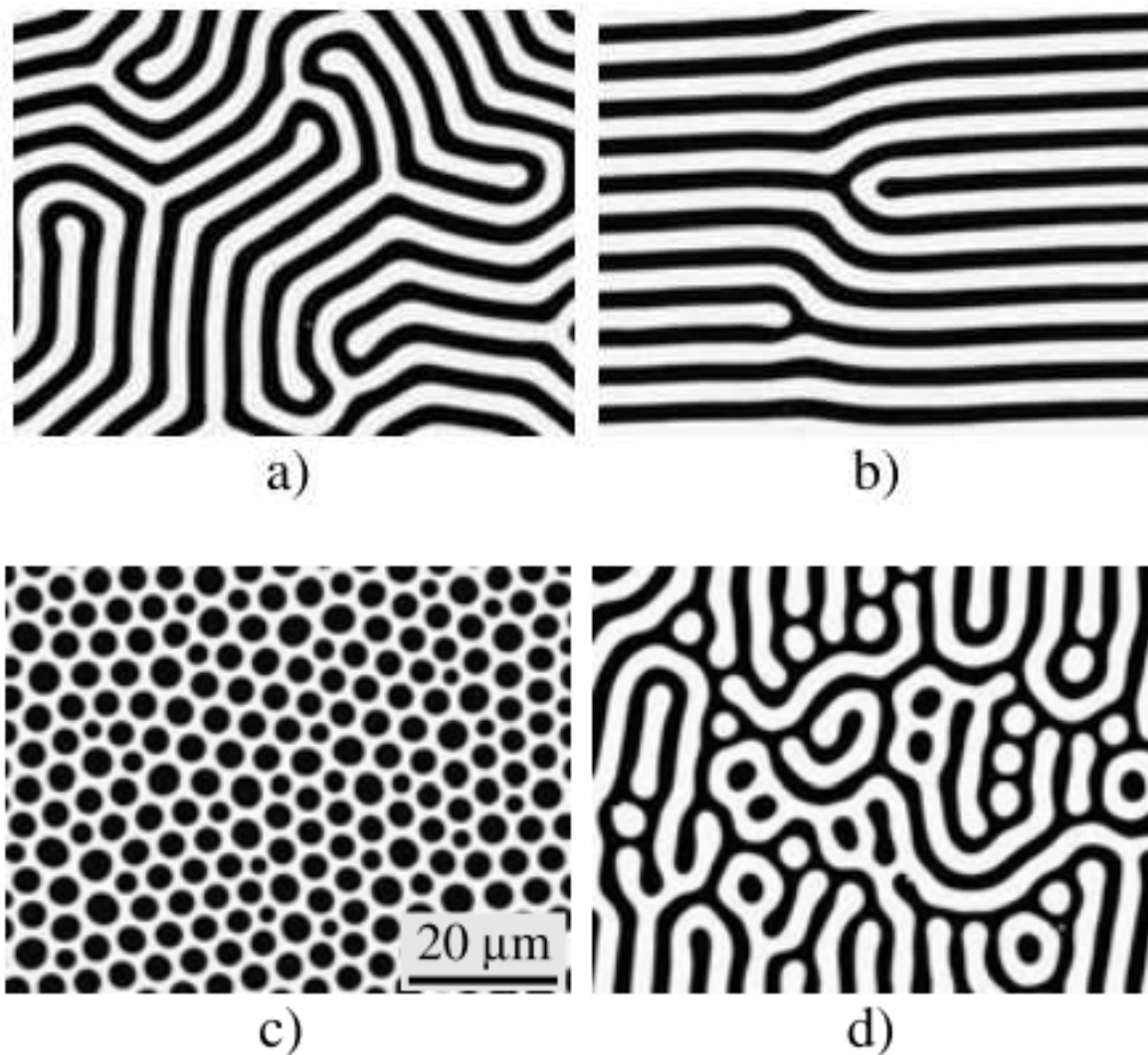
Домены

Границы

МикромагнетизмНано-магнетизмНано-элементыНано-магнетизмПримерыДинамикаMagnetism@homeВыводы

W. Szmaja et al., J. Alloys Compd. 506 (2010) 526.

W. Szmaja, J. Magn. Mater. 234 (2001) 13.



A. Hubert, R. Schäfer, Magnetic Domains: The Analysis of Magnetic Microstructures, Springer, 1998.

Магнетизм

Магниты

Опилки

Bitter

Bitter

Bitter

Домены

Границы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Магнетизм

Магниты

Опилки

Bitter

Bitter

Bitter

Домены

Границы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

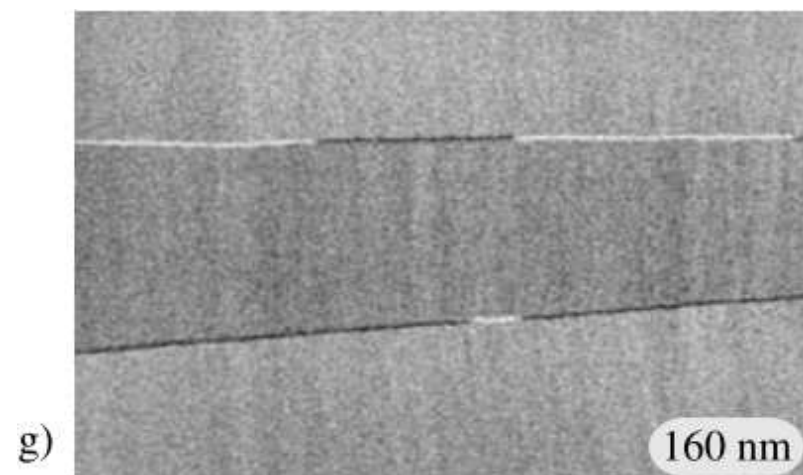
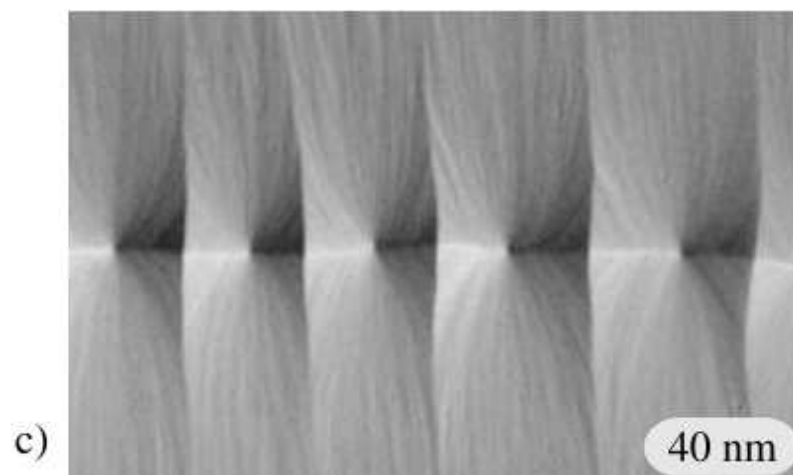
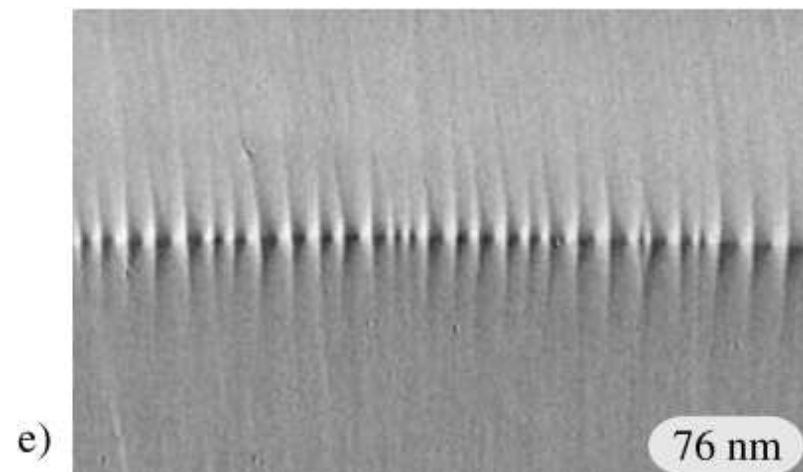
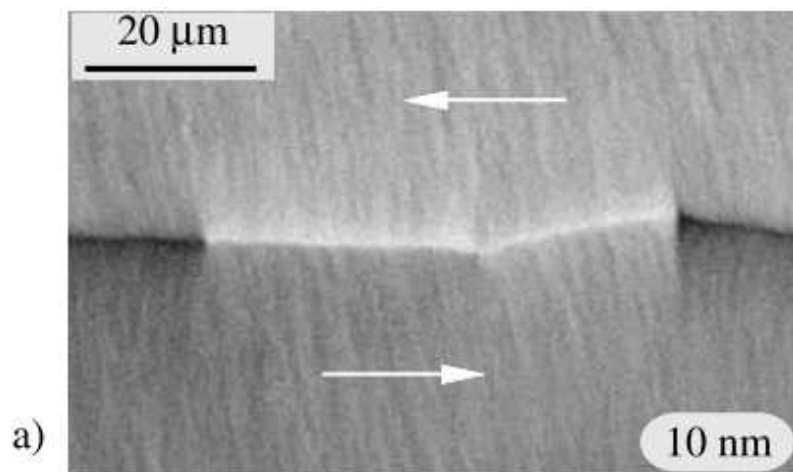
Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы



A. Hubert, R. Schäfer, Magnetic Domains: The Analysis of Magnetic Microstructures, Springer, 1998.

Магнетизм

Микромагнетизм

Персоналии

Уравнения

Взаимодействия

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Микромагнетизм

Магнетизм

Микромагнетизм

Персоналии

Уравнения

Взаимодействия

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы



L. Landau and E. Lifshitz, P. Z. der Sow., 8, 153 (1935).
W. F. Brown, Micromagnetics, 1963.

Магнетизм

Микромагнетизм

Персоналии

Уравнения

Взаимодействия

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

$$|\vec{M}(\vec{r}, t)| = M_S$$

$$E[\{\vec{M}\}] = E_{\text{EX}} + E_{\text{A}} + E_{\text{Z}} + E_{\text{MS}} + \dots$$

$$\vec{H}_{\text{eff}} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\delta E[\{\vec{M}\}]}{\delta \vec{M}}$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma \vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}} - \lambda \vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}})$$

L. Landau and E. Lifshitz, P. Z. der Sow., 8, 153 (1935).

W. Döring, Z. Naturforsch. A 3, 373 (1948).

T.L. Gilbert, A Lagrangian formulation of the gyromagnetic equation of the magnetic field, Phys. Rev. 100, 1243(1955).

Магнетизм

Микромагнетизм

Персоналии

Уравнения

Взаимодействия

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

$$E_{\text{EX}} = \frac{C}{2} \iiint_V \sum_{i=X,Y,Z} (\vec{\nabla} M_i)^2 d^3\vec{r}$$

$$E_{\text{MS}} = -\frac{1}{2}\mu_0 \iiint_V \frac{\vec{H}_D[\vec{M}] \cdot \vec{M}}{2} d^3\vec{r}$$

$$E_Z = -\mu_0 \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{M} d^3\vec{r}$$

$$E_{\text{DM}} = D \iiint_V \vec{M} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}) d^3\vec{r}$$

...

где $\vec{H}_D = \vec{\nabla} u(\vec{r})$, $\vec{\nabla}^2 u = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$ с граничным условием $\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} |\vec{r}|u, |\vec{r}|^2|\vec{\nabla} u| < \infty$.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Нано-магнетизм

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Основными взаимодействиями, всегда присутствующими в ферромагнетике, являются обменное и магнитодипольное. Их относительную силу можно охарактеризовать параметром с размерностью длины:

$$L_E = \sqrt{\frac{C}{\mu_0 M_S^2}},$$

Для большинства известных магнитомягких материалов L_E порядка десятка(ов) нанометров.

“Нано-магнетизм” это микромагнетизм, когда размеры магнетика сопоставимы с L_E . Тогда обмен доминирует.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Рассмотрим тонкую плёнку с толщиной $\approx L_E$.

Длина вектора намагниченности фиксирована $|\vec{M}| = M_S$, $\vec{m} = \vec{M}/M_S$, $|\vec{m}| = 1$. Это можно учесть автоматически, записав его (чисто формально) в виде

$$\begin{aligned} m_X + im_Y &= \frac{2w(z, \bar{z})}{1 + |w(z, \bar{z})|^2} \\ m_Z &= \frac{1 - |w(z, \bar{z})|^2}{1 + |w(z, \bar{z})|^2}, \end{aligned}$$

где $w(z, \bar{z})$ – комплексная функция комплексного переменного (не обязательно аналитическая, т.е. не обязательно дифференцируемая) а линия обозначает комплексное сопряжение $\bar{z} = X - iY$.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Вводя операторы комплексного дифференцирования $\partial/\partial z = (\partial/\partial X - i\partial/\partial Y)/2$, $\partial/\partial \bar{z} = (\partial/\partial X + i\partial/\partial Y)/2$, обменную энергию можно представить в виде

$$\sum_{i=X,Y,Z} (\vec{\nabla} m_i)^2 = \frac{8}{(1 + w\bar{w})^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right).$$

Уравнение Эйлера для экстремума этого функционала имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{2\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}.$$

Gordon Woo, Pseudoparticle configurations in two-dimensional ferromagnets, Journal of Mathematical Physics 18(6), AIP, 1264 (1977).

МагнетизмМикромагнетизмНано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементыНано-магнетизмПримерыДинамикаMagnetism@homeВыводы

Уравнение Эйлера для экстремума обменного функционала имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{2\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}.$$

Очевидно, что любая аналитическая функция комплексного переменного $w(z, \bar{z}) = f(z)$ является решением этого уравнения !

А.А. Белавин, А.М. Поляков, Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика, Письма в ЖЭТФ 22, 503(1975).

T.H.R. Skyrme, A unified field theory of mesons and baryons, Nucl. Phys. 31, 556 (1962).

стенка с перетяжками

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементы

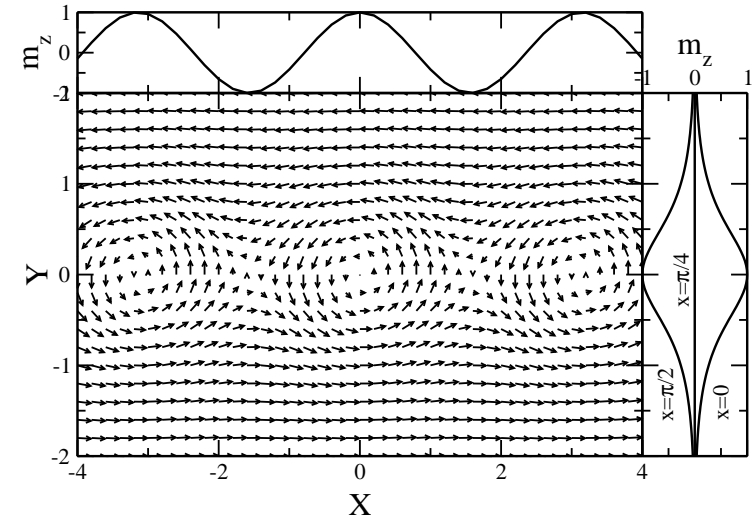
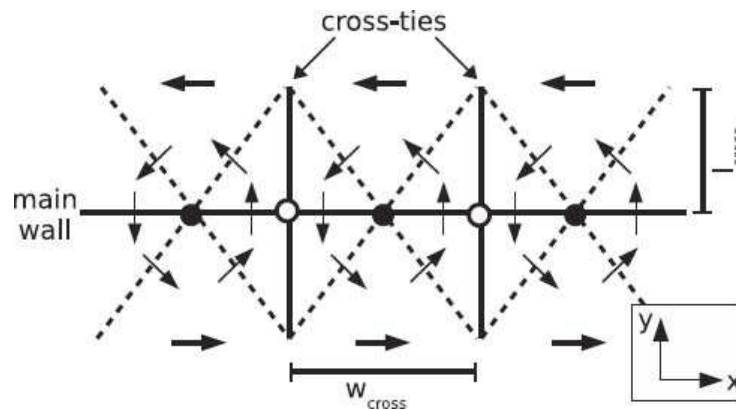
Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

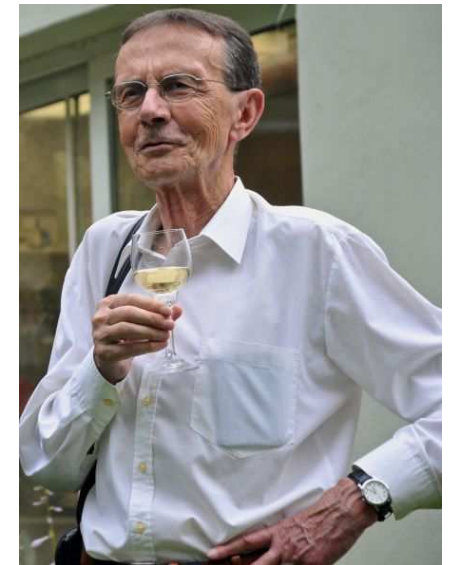
Magnetism@home

Выводы



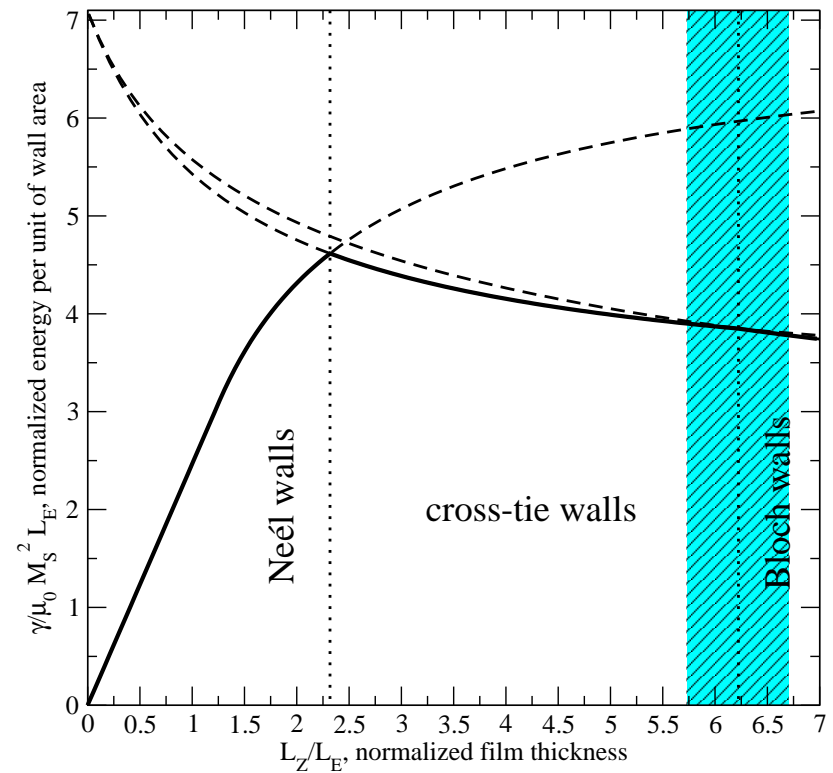
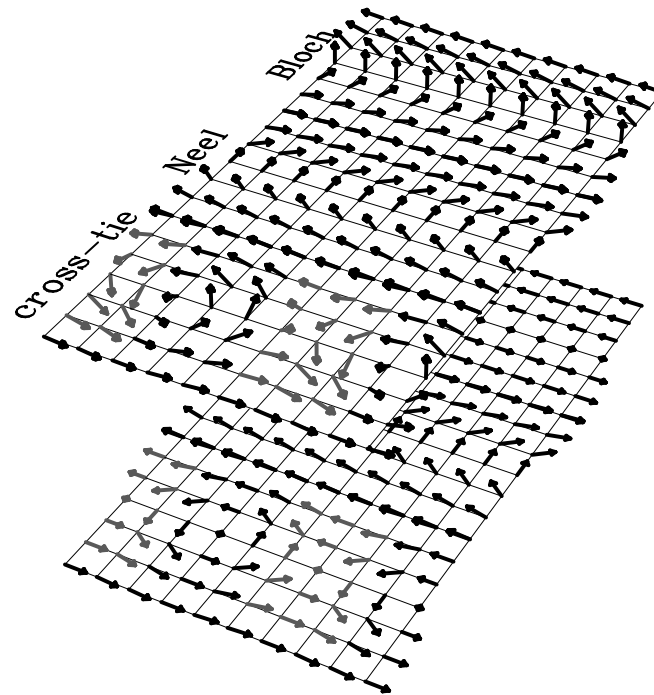
$$w(z, \bar{z}) = i \tan(z/c)$$

К.Л. Metlov,
Simple analytical description
of the cross-tie domain wall structure,
Appl. Phys. Lett. 79(16), 2609(2001).



V. Kamberský, 1935-2014

стенка с перетяжками



Amikam Aharoni, Introduction to the theory of ferromagnetism, Oxford University Press, 1996.

K.L. Metlov, Cross-tie domain wall ground state in thin films, Journal of Low Temperature Physics 139(1), 207(2005).

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Диски

Шестиугольники

Квадраты

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Магнитные нано-элементы

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Диски

Шестиугольники

Квадраты

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

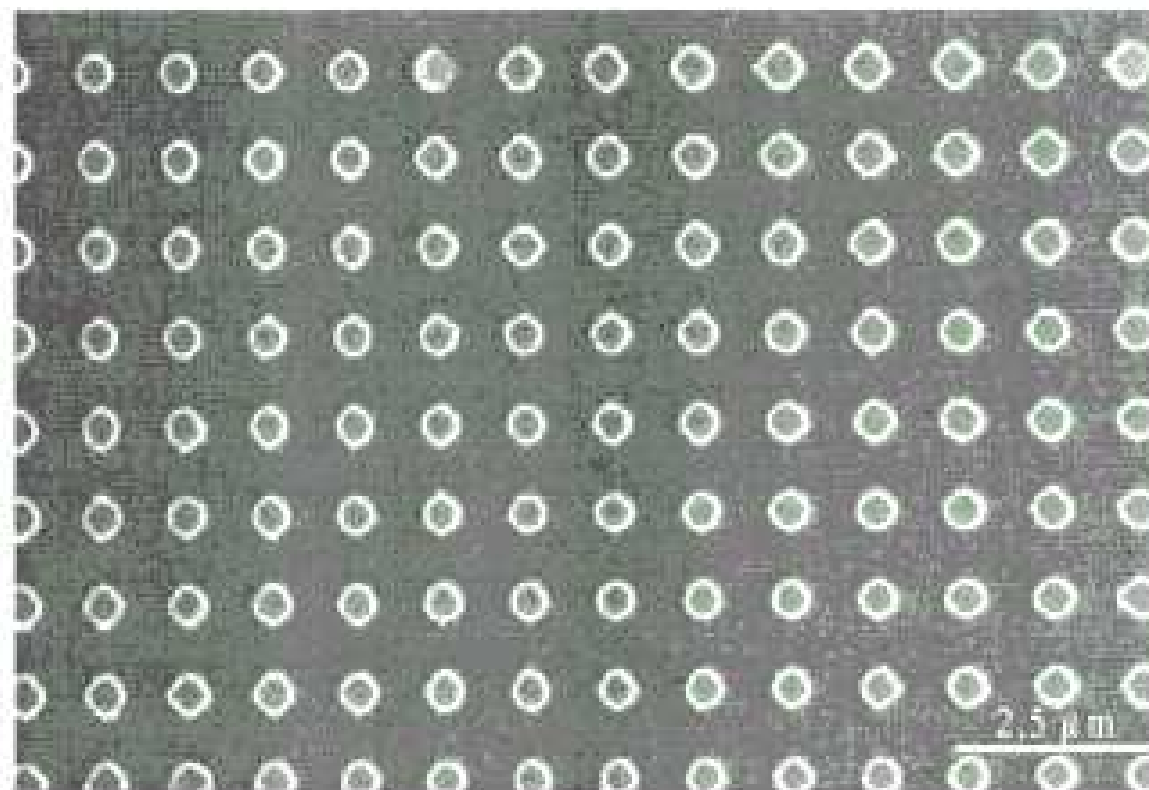


FIG. 1. SEM image of a sample with period $p = 1030$ nm and a dot diameter of $d = 480$ nm.

Appl. Phys. Lett. 71 (19), 10 November 1997.

Шестиугольники

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Диски

Шестиугольники

Квадраты

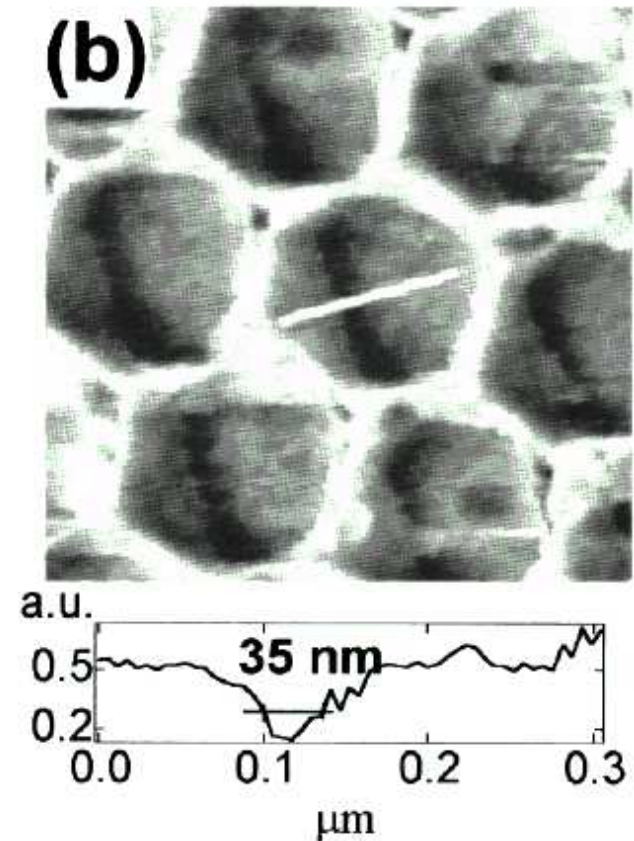
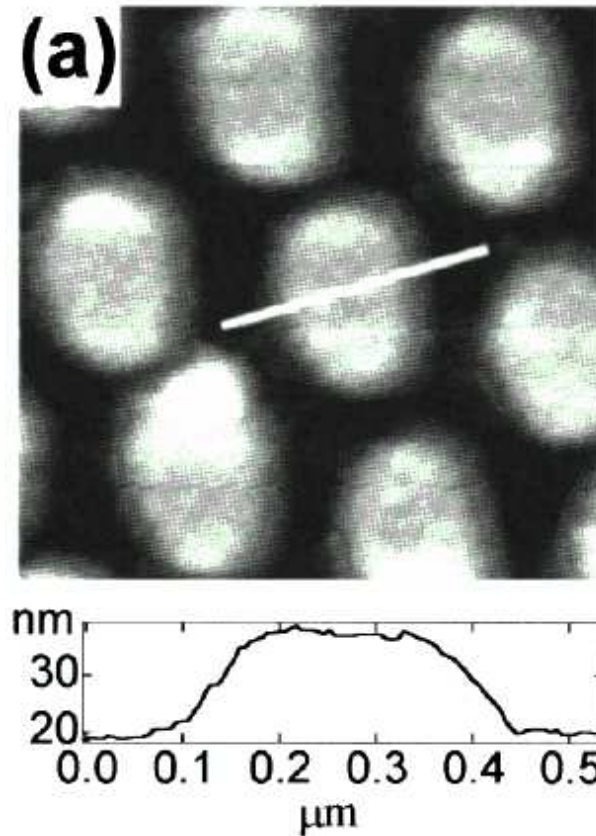
Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы



Appl. Phys. Lett. 76(20), 15 May 2000

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Диски

Шестиугольники

Квадраты

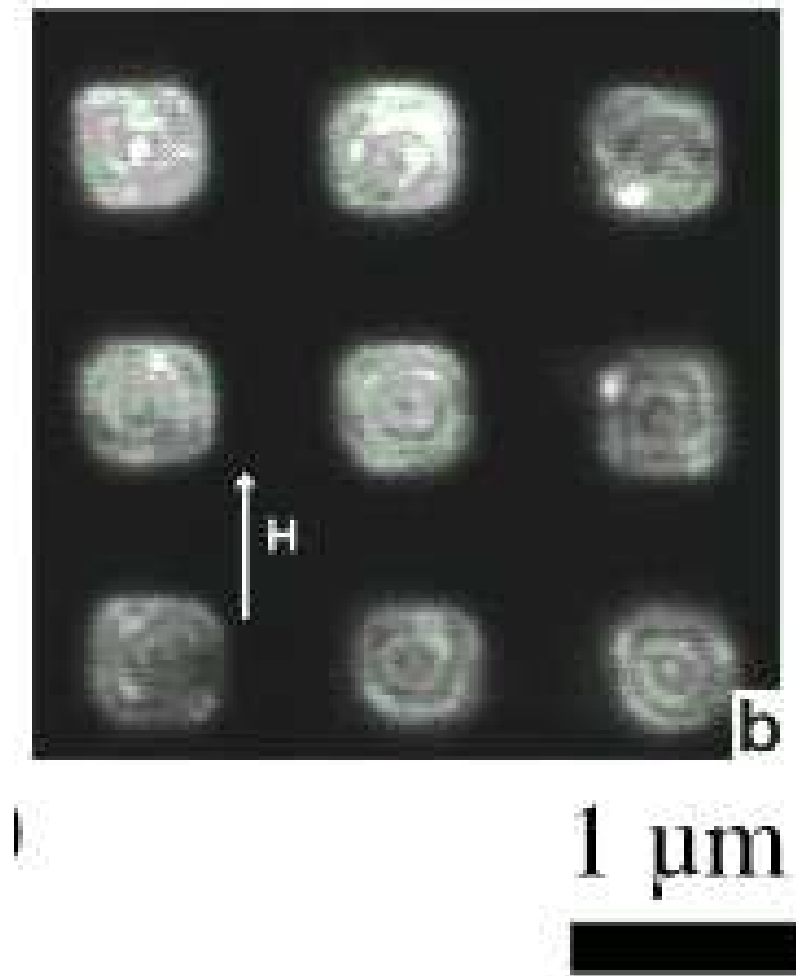
Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы



J. Appl. Phys. 86 (8), 15 October 1999

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

задача Римана-
Гильберта

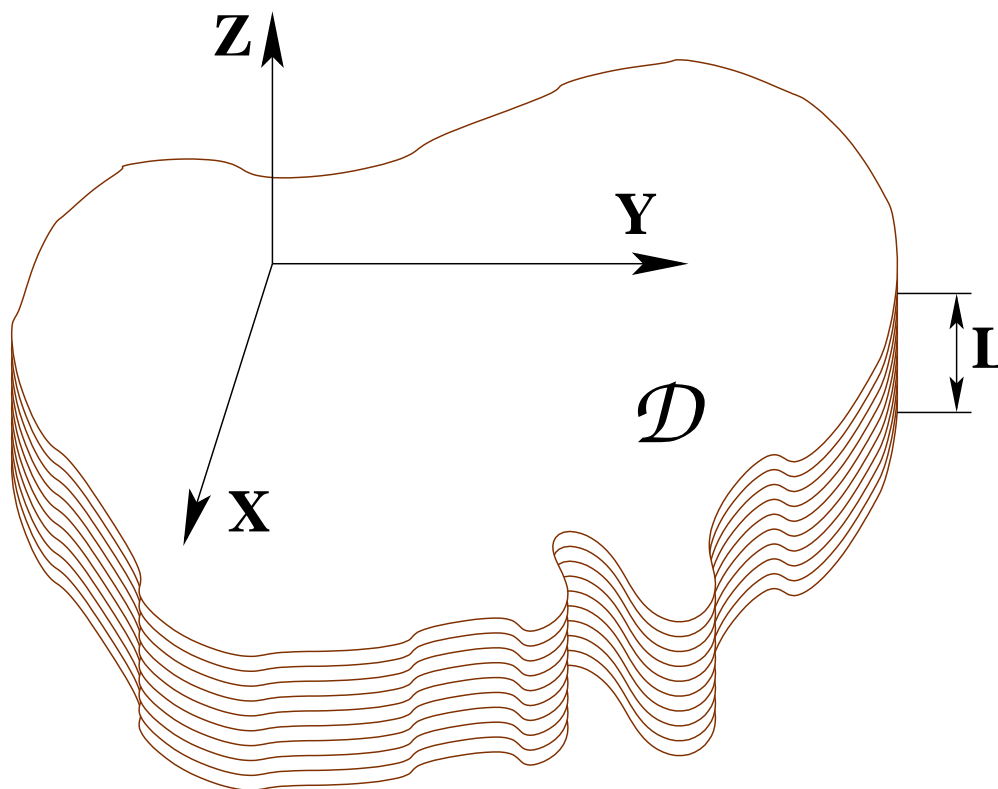
Примеры

Донецкий Физико-Технический Институт
Динамика

Нано-магнетизм планарных ЭЛЕМЕНТОВ

Плоский цилиндр

Найти равновесное (метастабильное) распределение вектора намагниченности в плоском (тонком) ферромагнитном (из идеально мягкого материала) цилиндре.



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

задача Римана-
Гильберта

Примеры

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

задача Римана-
Гильберта

Примеры

Донецкий Физико-Технический Институт
Динамика

В континуальном приближении

$$\frac{e[\vec{m}]}{\mu_0 M_S^2} = \iiint_{D,L} \left\{ \frac{L_E^2}{2} \sum_{i=X,Y,Z} (\vec{\nabla} m_i)^2 - \vec{h}_D[\vec{m}] \cdot \vec{m} \right\} d^3 \vec{r},$$

где $L_E = \sqrt{C/(\mu_0 M_S^2)}$ обменная длина,

$\vec{\nabla} = \{\partial/\partial X, \partial/\partial Y, \partial/\partial Z\}$, $\vec{h}_D[\vec{m}]$ размагничивающее поле, созданное $\vec{m}(\vec{r})$.

Как говорилось, минимизировать такую энергию точно в общем случае не представляется возможным.

Последовательная минимизация

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

задача Римана-
Гильберта

Примеры

Донецкий Физико-Технический Институт
Динамика

Предположим наличие хорошо определенной иерархии энергий (какие-то слагаемые полной энергии более “важны”, чем другие).

Вместо минимизации суммы различных компонент энергии, будем минимизировать их поочередно, от более важных к менее важным.

Начнем с полного набора всех возможных векторных полей $\vec{m}(\vec{r})$. Просеем его, оставив только поля, соответствующие экстремуму самого важного слагаемого. Останется бесконечное множество полей. Повторим с менее важным слагаемым, и т.д.

Насколько далеко так можно продвинуться ?

Для достаточно маленького плоского нано-цилиндра.

1. Обменная энергия
2. Магнитостатическая энергия
 - (a) Поверхностные заряды
 - i. торцевые заряды
 - ii. боковые заряды
 - (b) Объемные заряды

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

задача Римана-
Гильберта

Примеры

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

задача Римана-
Гильберта

Примеры

Донецкий Физико-Технический Институт
Динамика

Считаем, что толщина цилиндра мала по сравнению с обменной длиной.

Рассматриваем только однородные по толщине распределения намагниченности.

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial Z} = 0.$$

Тогда удобно (чисто формально) ввести комплексную координату

$$z = X + iY.$$

Стереοграфическая проекция

Длина вектора намагниченности фиксирована $|\vec{m}| = 1$.
Это можно учесть автоматически, записав его (чисто формально) в виде

$$m_X + im_Y = \frac{2w(z, \bar{z})}{1 + |w(z, \bar{z})|^2}$$
$$m_Z = \frac{1 - |w(z, \bar{z})|^2}{1 + |w(z, \bar{z})|^2},$$

где $w(z, \bar{z})$ – комплексная функция комплексного переменного (не обязательно аналитическая, т.е. не обязательно дифференцируемая) а линия обозначает комплексное сопряжение $\bar{z} = X - iY$.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереοграфическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

задача Римана-
Гильберта

Примеры

Донецкий Физико-Технический Институт
Динамика

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
МероныТорцевые
зарядыБоковые
зарядызадача Римана-
Гильберта

Примеры

Донецкий Физико-Технический Институт
Динамика

Вводя операторы комплексного дифференцирования $\partial/\partial z = (\partial/\partial X - i\partial/\partial Y)/2$, $\partial/\partial \bar{z} = (\partial/\partial X + i\partial/\partial Y)/2$, обменную энергию можно представить в виде

$$\sum_{i=X,Y,Z} (\vec{\nabla} m_i)^2 = \frac{8}{(1 + w\bar{w})^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right).$$

Уравнение Эйлера для экстремума этого функционала имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{2\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}.$$

Некоторые решения этого нелинейного уравнения известны.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

задача Римана-
Гильберта

Примеры

Донецкий Физико-Технический Институт
Динамика

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{2\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}.$$

Солитоны (А.А. Белавин и А.М. Поляков)

$$w = f(z).$$

Мероны (Дэвид Гросс)

$$w = \frac{f(z)}{\sqrt{f(z)\bar{f}(\bar{z})}}.$$

D.J. Gross, Meron configurations in the two-dimensional $O(3)$ σ -model, Nuclear Physics B 132(5), 439–456, 1978.

Мерон $|w| = 1$ не имеет торцевых зарядов, поскольку в нём $m_Z = 0$. Однако, обменная энергия мерона в окрестности нулей и полюсов $f(z)$ расходится.

Представляя $w(z, \bar{z})$ в виде

$$w(z, \bar{z}) = \begin{cases} f(z)/e_1 & |f(z)| \leq e_1 \\ f(z)/\sqrt{f(z)\bar{f}(\bar{z})} & e_1 < |f(z)| \leq e_2 \\ f(z)/e_2 & |f(z)| > e_2 \end{cases},$$

где $f(z)$ – произвольная аналитическая функция, получим непрерывную функцию, сшивающую солитон и мерон, со свободными параметрами $0 < e_1 < e_2 < \infty$, позволяющими регулировать размер солитонных “шапок” вблизи нулей и полюсов $f(z)$.

- Магнетизм
- Микромагнетизм
- Нано-магнетизм
- Нано-элементы
- Нано-магнетизм
- Плоский цилиндр
- Энергия
- Последовательная минимизация
- Иерархия
- Толщина
- Стереографическая проекция
- Обмен
- Солитоны и Мероны
- Торцевые заряды
- Боковые заряды
- задача Римана-Гильберта
- Примеры

Выбором (оставшейся произвольной) функции $f(z)$ боковые заряды можно полностью убрать. Для этого необходимо решить краевую задачу Римана-Гильберта:

Найти аналитическую в \mathcal{D} функцию $f(z)$, такую что $\operatorname{Re} [f(\zeta)\overline{n(\zeta)}] = 0$ (отсутствуют нормальные к границе компоненты), где $\zeta \in \mathcal{C} = \partial\mathcal{D}$ – это граница \mathcal{D} , и $n(\zeta) = n_x(\zeta) + in_y(\zeta)$ – комплексная нормаль к \mathcal{C} .

К сожалению, решение Привалова этой краевой задачи, опубликованное в книге Лаврентьева и Шабата “Методы теории функций комплексного переменного”, позволяет найти только подмножество возможных функций $f(z)$.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

задача Римана-
Гильберта

Примеры

задача Римана-Гильберта (решение Привалова)

$$f(t) = \frac{a_0 t^2 + a_1 t + a_2}{e^{F^+(t)}} + \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 t + \bar{a}_2 t^2}{e^{\overline{F^-(1/\bar{t})}}}$$
$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=1} \frac{\log[-\lambda^2 \overline{n_T(\lambda)}/n_T(\lambda)]}{\lambda - t} d\lambda,$$

$$F^+(t) = F(t), |t| < 1 \text{ and } F^-(t) = F(t), |t| > 1.$$

Вычисляя интегралы и упрощая

$$f(t) = (itc + A - \bar{A}t^2)T'(t),$$

где $z = T(t)$ – конформное отображение $|t| < 1 \rightarrow z \in \mathcal{D}$,
 $c = \text{Im } a_1$ и $A = \bar{a}_0 - a_2$ свободные параметры.

K.L. Metlov, Two-dimensional topological solitons in soft ferromagnetic cylinders, 2001, arXiv:cond-mat/0102311

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский

цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

задача Римана-
Гильберта

Примеры

задача Римана-Гильберта (многовихревое решение)

Для верхней полуплоскости можно сразу записать:

$$f(t) = \frac{\sum_{i=0}^m g_i t^i}{\sum_{i=0}^n h_i t^i},$$

где g_i и h_i произвольные действительные числа.

Для произвольной формы торца частицы

$$f = T'(t) \frac{\prod_{i=0}^{m_p} (a_i - t)(\bar{a}_i - t) \prod_{j=0}^{m_r} (b_j - t)}{\prod_{i=0}^{n_p} (c_i - t)(\bar{c}_i - t) \prod_{j=0}^{n_r} (d_j - t)}$$

где $z = T(t)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость t на торец частицы z .

K.L. Metlov, Magnetization patterns in ferromagnetic nano-elements as functions of complex variable, Phys. Rev. Lett. 105, 107201(2010).

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

задача Римана-
Гильберта

Примеры

задача Римана-Гильберта (многосвязная)

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

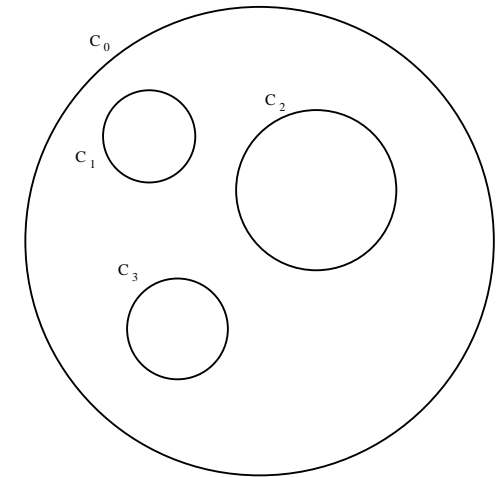
Боковые
заряды

задача Римана-
Гильберта

Примеры

Донецкий Физико-Технический Институт
Динамика

Функцию Шоттки-Клейна
можно представить себе как
обобщение разности $z - \zeta = w_1(z, \zeta)$.



Для кольца, например

$$w_r(z, \zeta) = (z - \zeta) \frac{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k} z/\zeta)(1 - q^{2k} \zeta/z)}{(\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}))^2}$$

Darren Crowdy, The
Schwarz–Christoffel mapping to bounded multiply
connected polygonal domains, Proc. R. Soc. A 461(2061),
2653(2005).

задача Римана-Гильберта (многосвязная)

$$f(z) = \frac{\partial}{\partial z} \log \left(\prod_m F_1(z, \zeta_{1,m}, \zeta_{2,m}) \prod_n F_2(z, \zeta_n) \right),$$

$$F_1(z, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{w(z, \zeta_1)}{w(z, \zeta_2)},$$

$$F_2(z, \zeta) = \frac{w(z, \zeta)w(z, 1/\bar{\zeta})}{w(z, \bar{\zeta})w(z, 1/\zeta)}.$$

Можно так же показать, что в многосвязной области

$$\#(\text{нулей } f(z)) - \#(\text{полюсов } f(z)) = \text{связность} - 2$$

A.V. Bogatyrev and K.L. Metlov, Magnetic states in multiply-connected flat nanoelements, Low Temperature Physics 41(10), 984(2015).

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

задача Римана-
Гильберта

Примеры

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная
область

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Примеры.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная область

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Конформное отображение верхней полуплоскости на единичный диск имеет вид

$$T(t) = -\frac{e^{i\alpha}(h + it)}{h - it},$$

где h произвольный действительный параметр и $\alpha \in [0, 2\pi)$.

В случае $m = 2, n = 0$ получим известные ранее решения.

$$f(z) = (izc + A - \bar{A}z^2),$$

где c и A произвольные действительный и комплексный параметры. $A = 0$ дает анзац Усова и Песчаного для централизованного магнитного вихря.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

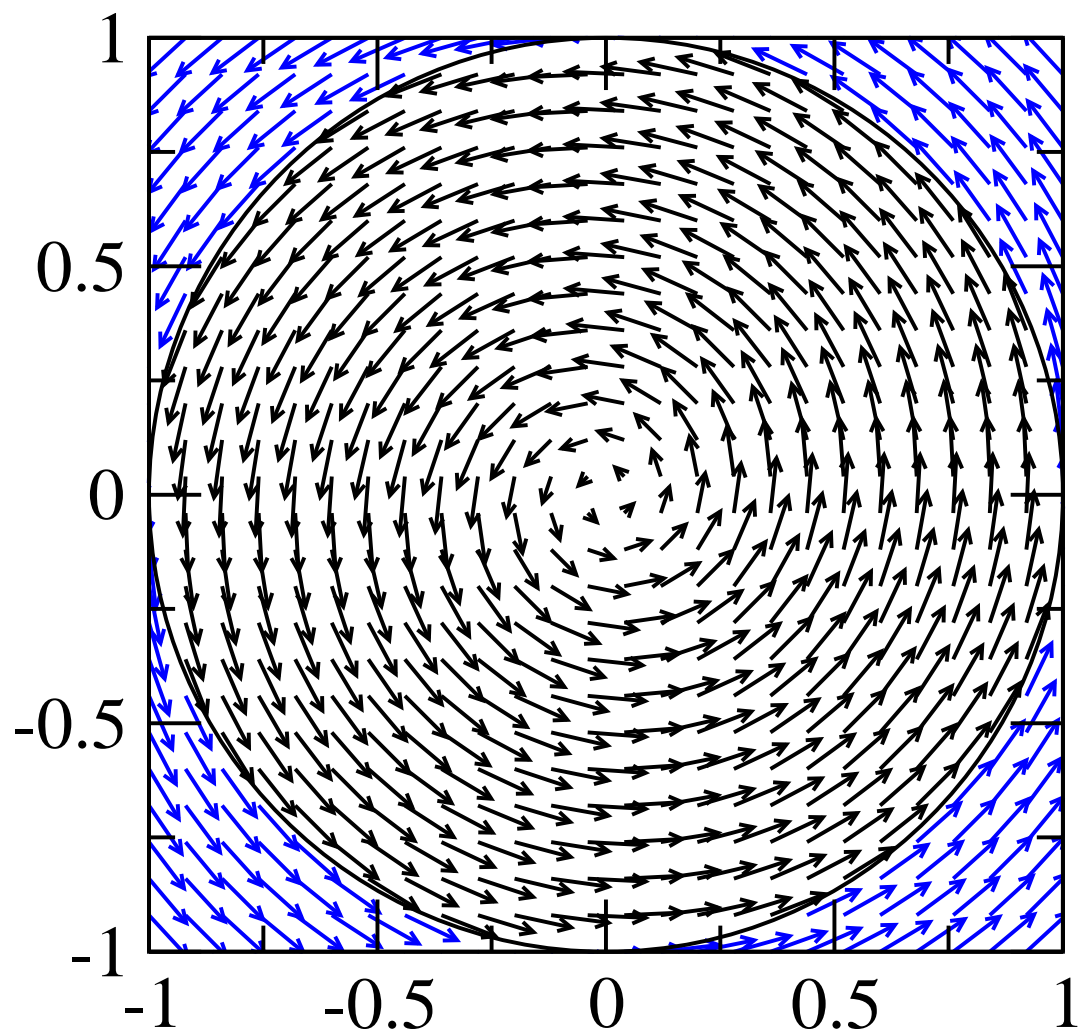
Кольцо

Трёхсвязная
область

Динамика

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

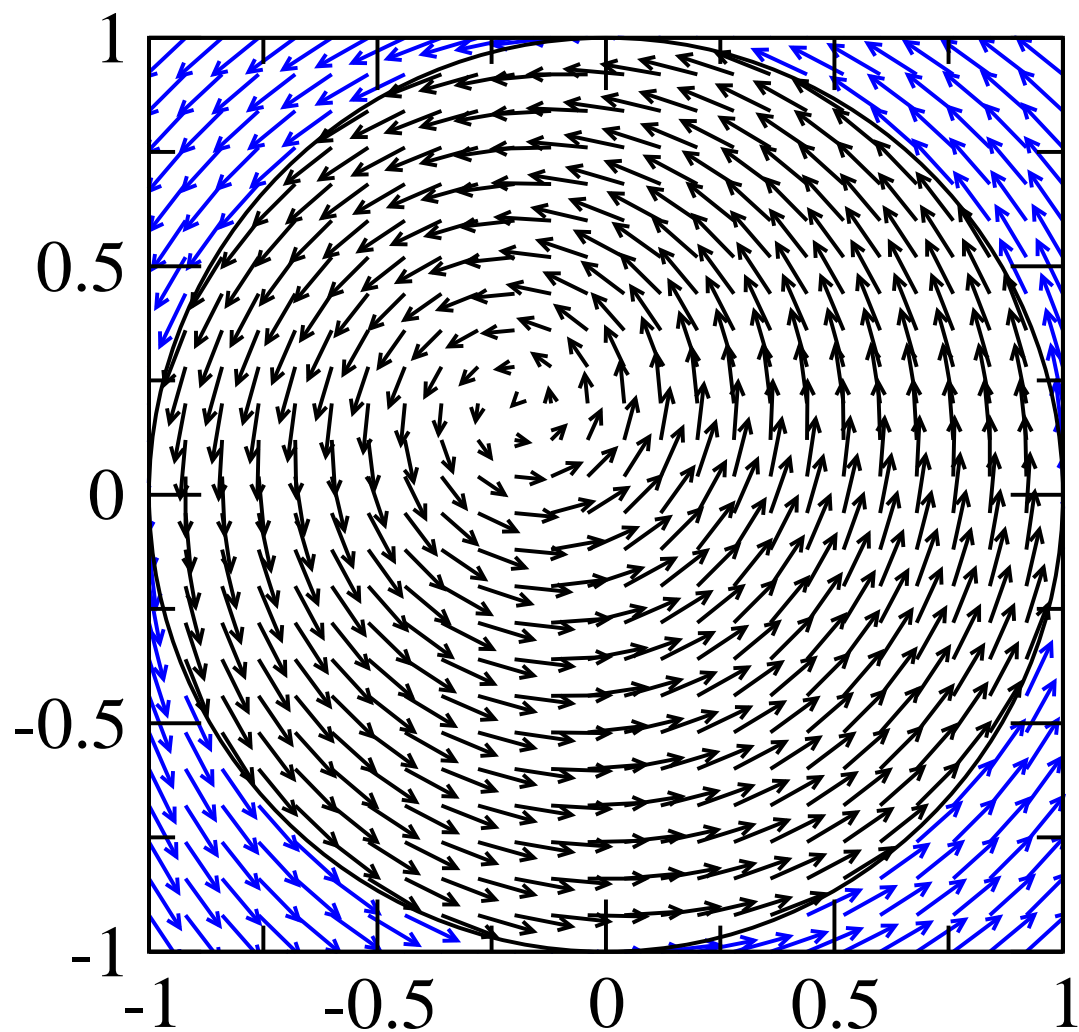
Кольцо

Трёхсвязная
область

Динамика

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

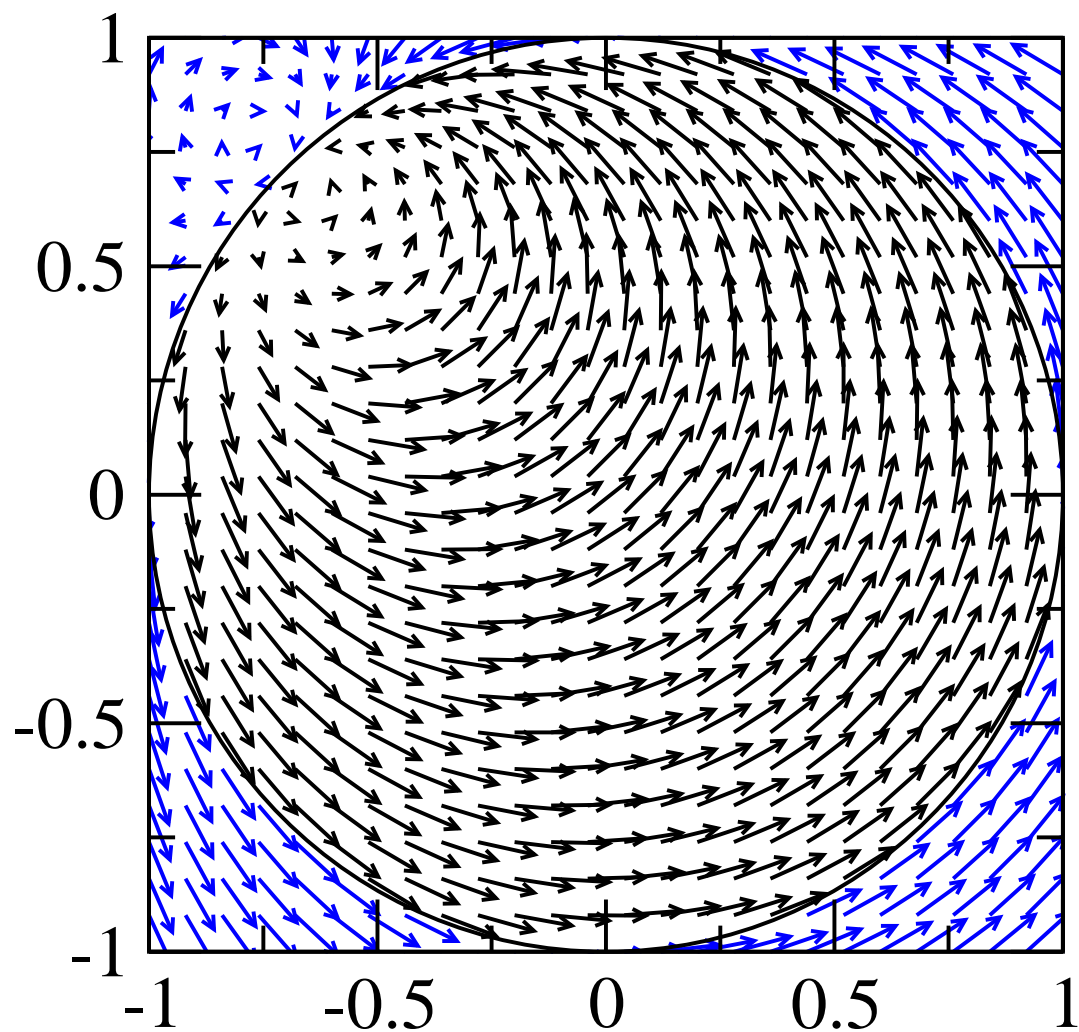
Кольцо

Трёхсвязная
область

Динамика

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

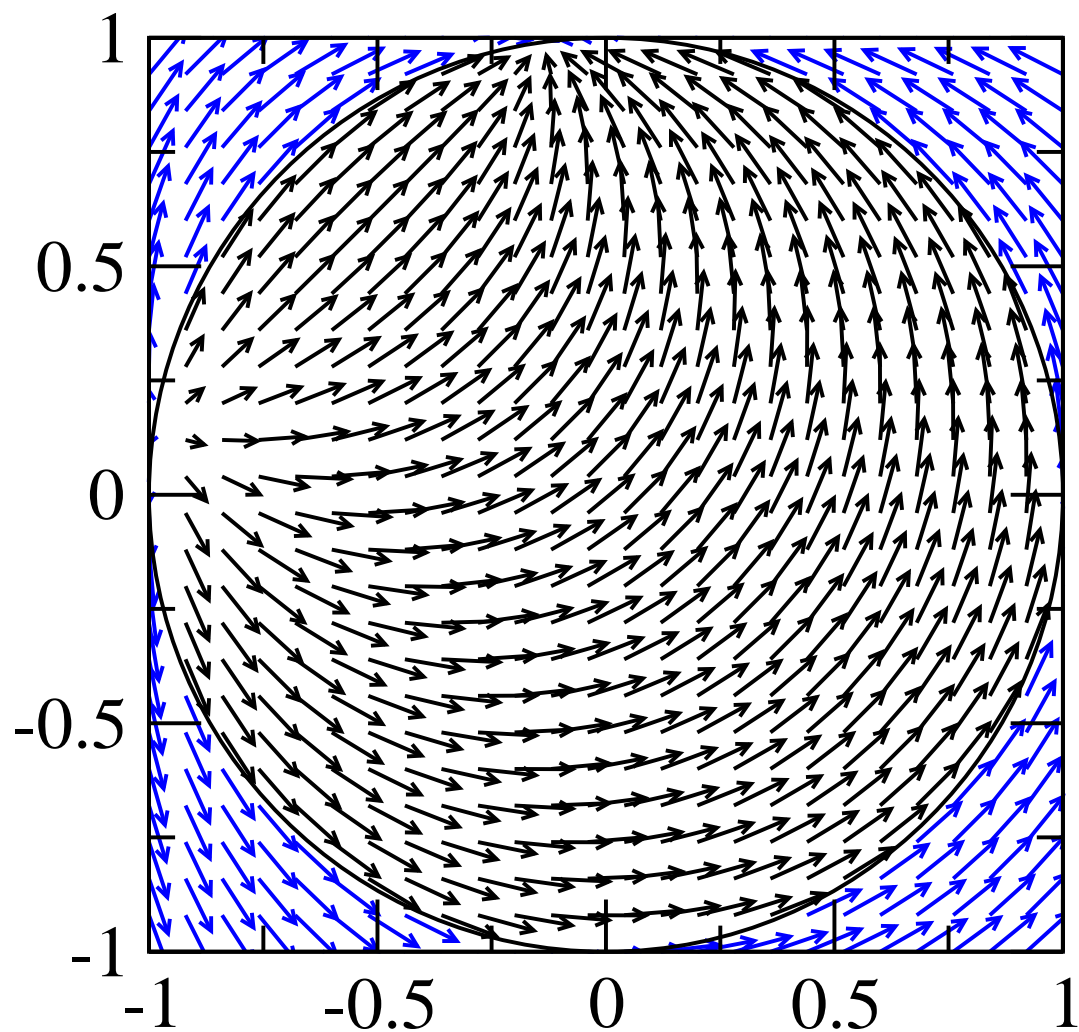
Кольцо

Трёхсвязная
область

Динамика

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

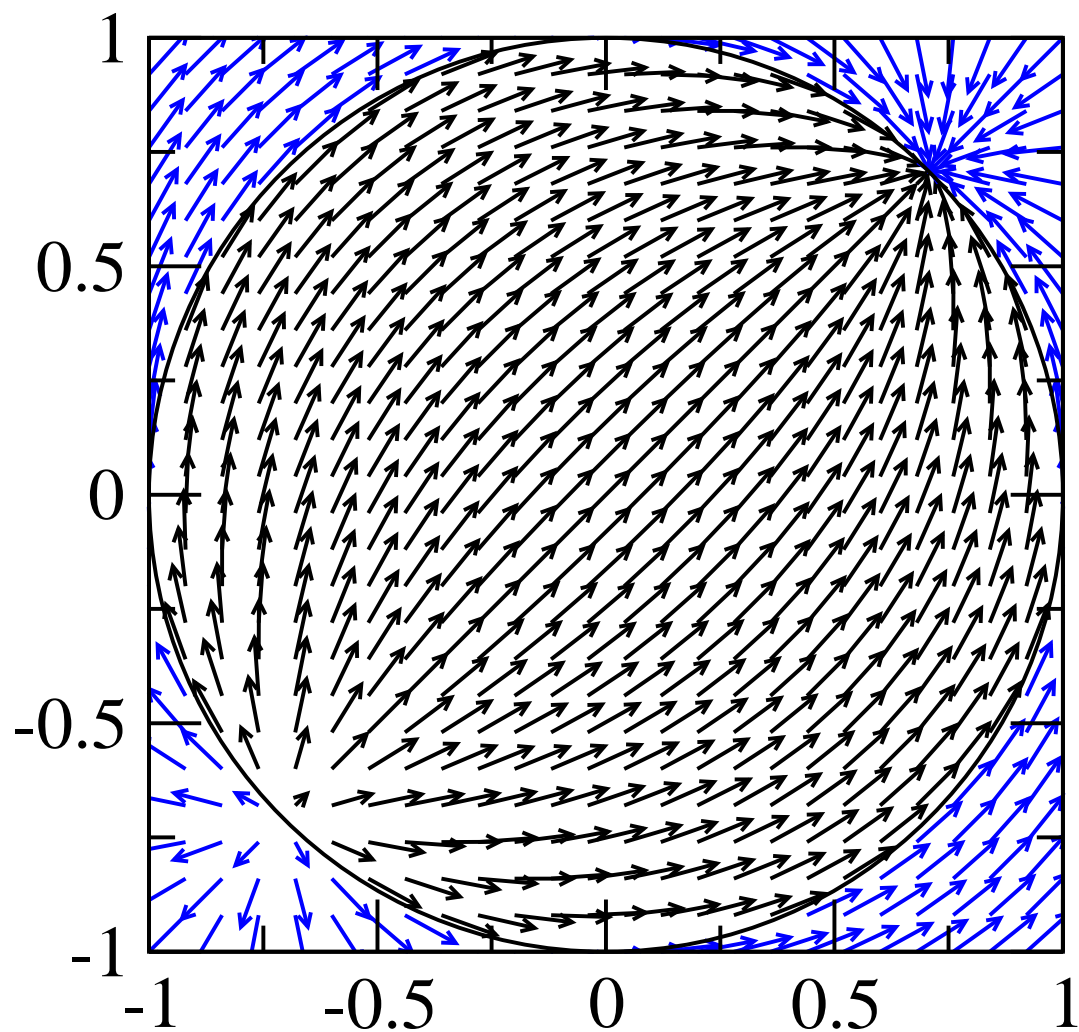
Кольцо

Трёхсвязная
область

Динамика

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

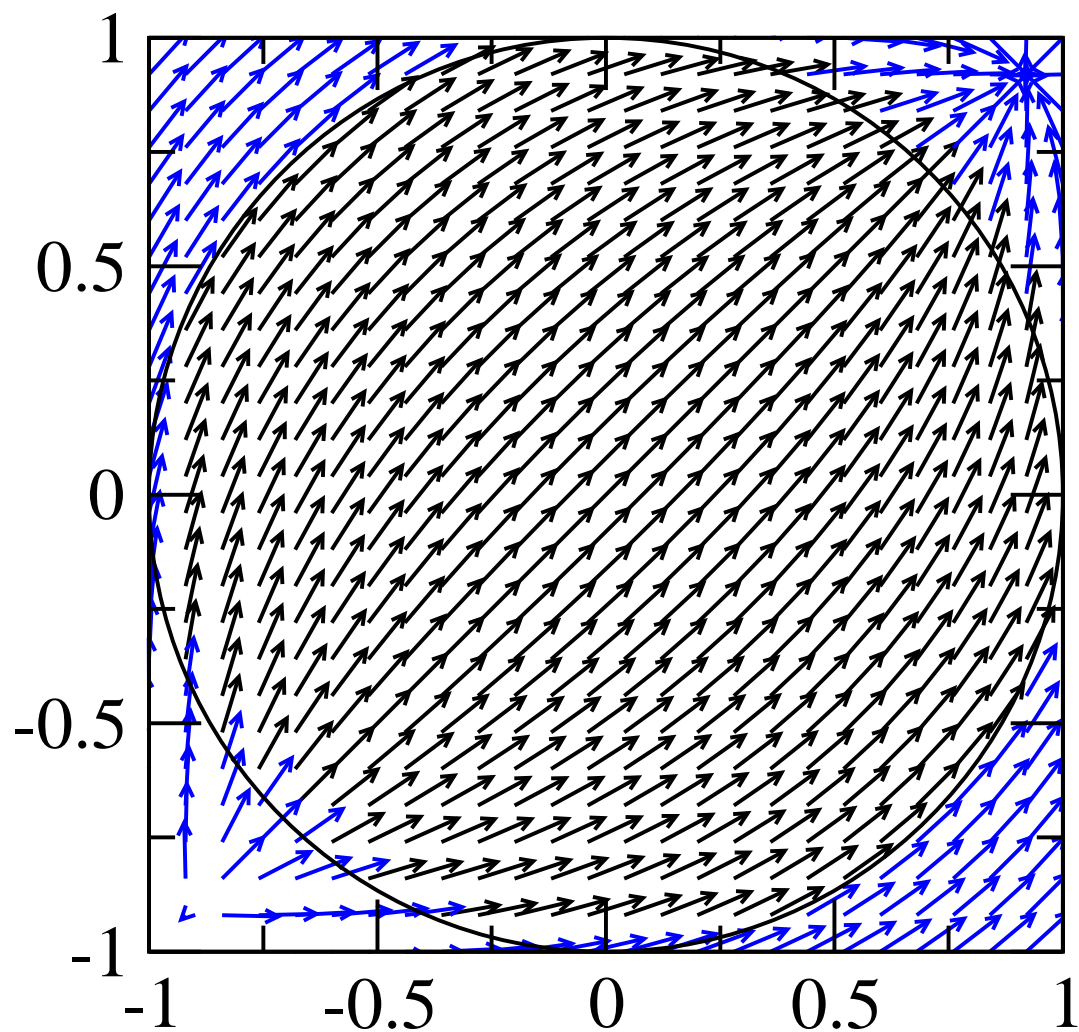
Кольцо

Трёхсвязная
область

Динамика

Magnetism@home

Выводы



В случае бóльших значений m и n получим многовихревые состояния.

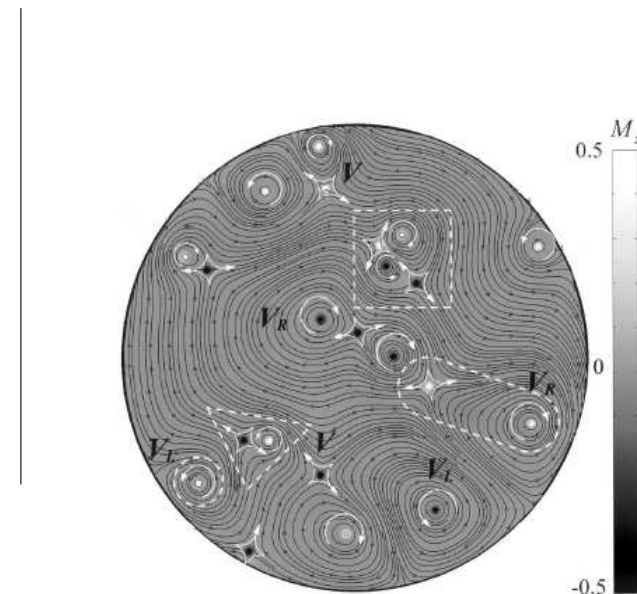
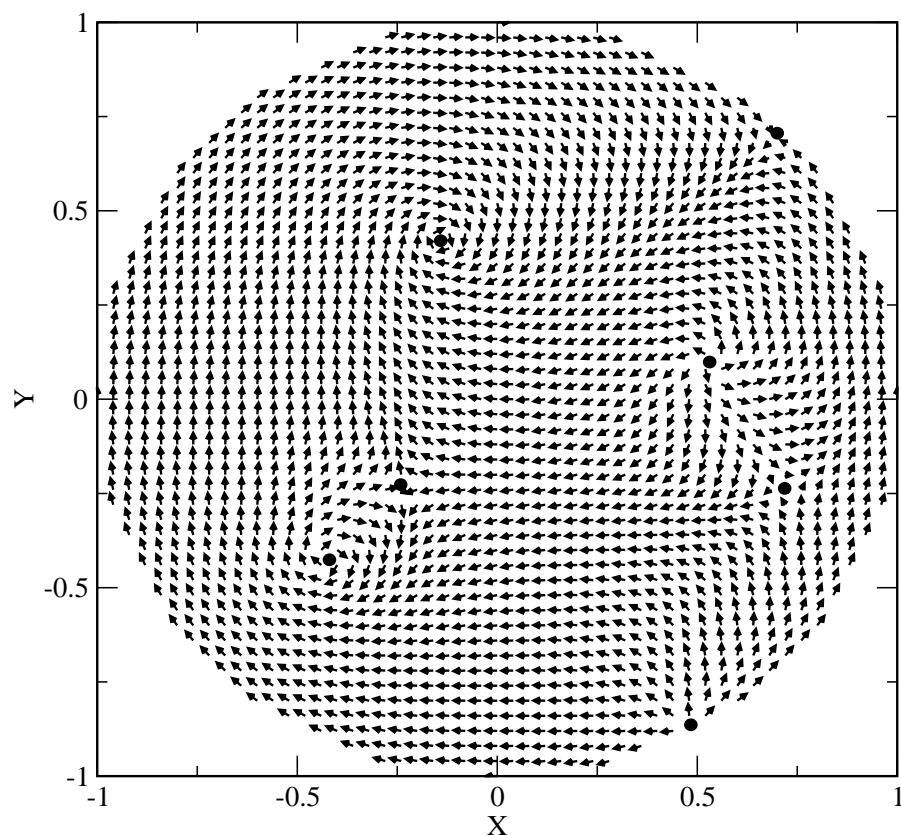


FIG. 1. The plane-view image of magnetic microstructures taken at $t = 0.59$ ns during a relaxation dynamics approaching the equilibrium vortex state from an initial random in-plane M . The gray scale indicates the M_z component, while the contour lines with small arrows represent the in-plane directions of M . The white and black spots represent up and down core orientations of both types of V and \bar{V} . The characteristic structures of various vortex states are denoted by symbols as noted, which are described in the text. Dotted-lines of square, triangle, stadium, and circle shapes highlight the various features of vortices interacting with each other.

К.-S. Lee, B.-W. Kang, Y.-S. Yu and S.-K. Kim, Appl. Phys. Lett. 85, 1568 (2004).

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная область

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная
область

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Конформное отображение верхней полуплоскости на равнобедренный треугольник дано

$$T(t) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6)} \int_0^t (1 - u^2)^{-2/3} du - \frac{t}{2\sqrt{3}},$$

где опущены дополнительные параметры, связанные со свободой выбора отображения верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

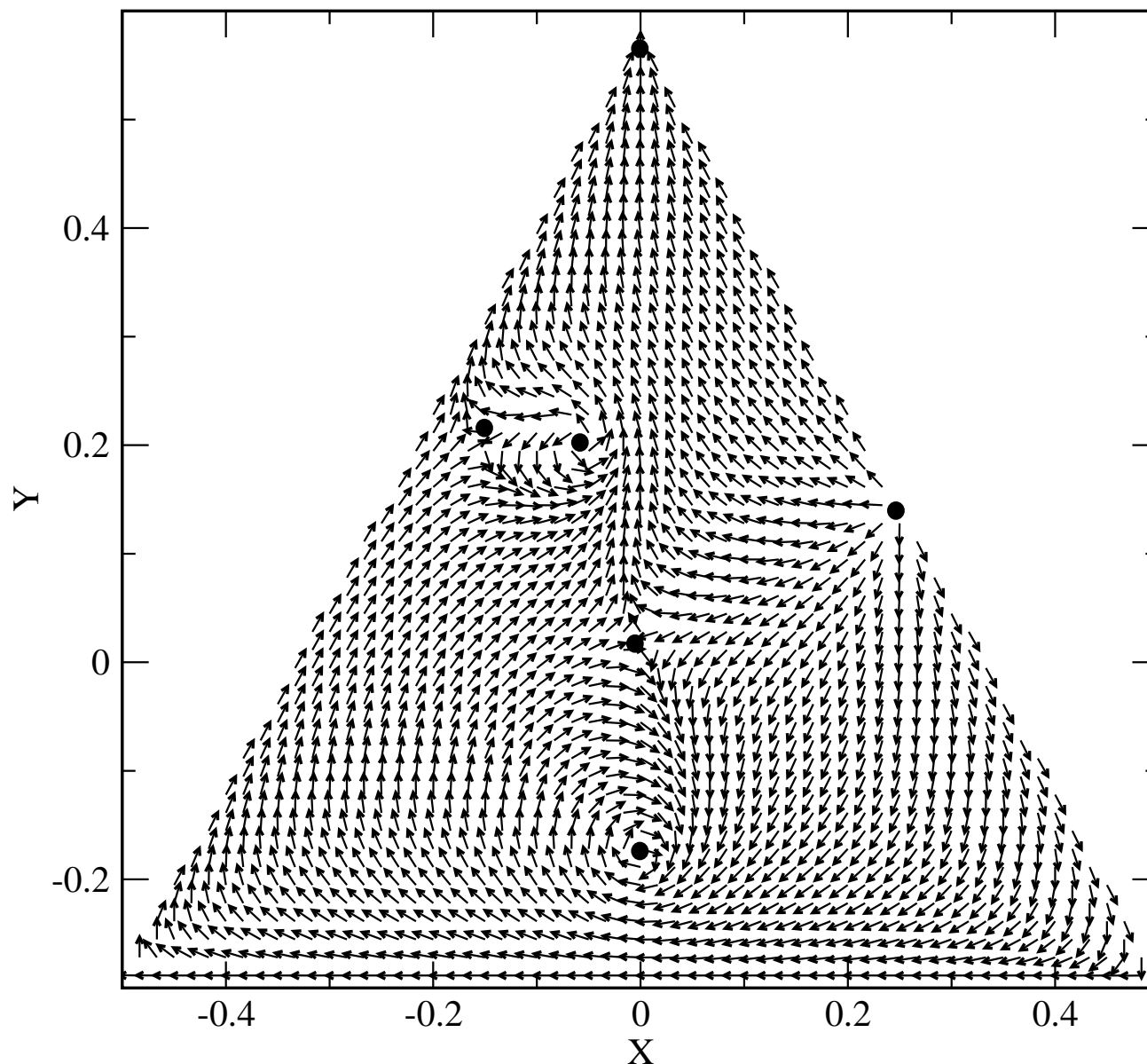
Кольцо

Трёхсвязная
область

Динамика

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная
область

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Конформное отображение верхней полуплоскости на полосу $0 < \text{Im } z < 1$ есть

$$T(t) = -\frac{\log t}{\pi},$$

где снова опущены дополнительные параметры, связанные со свободой выбора отображения верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость.

$$M(t) = \frac{at + b}{ct + d},$$

где $ad - bc > 0$, что соответствует отображению верхней полуплоскости на верхнюю, а не на нижнюю.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

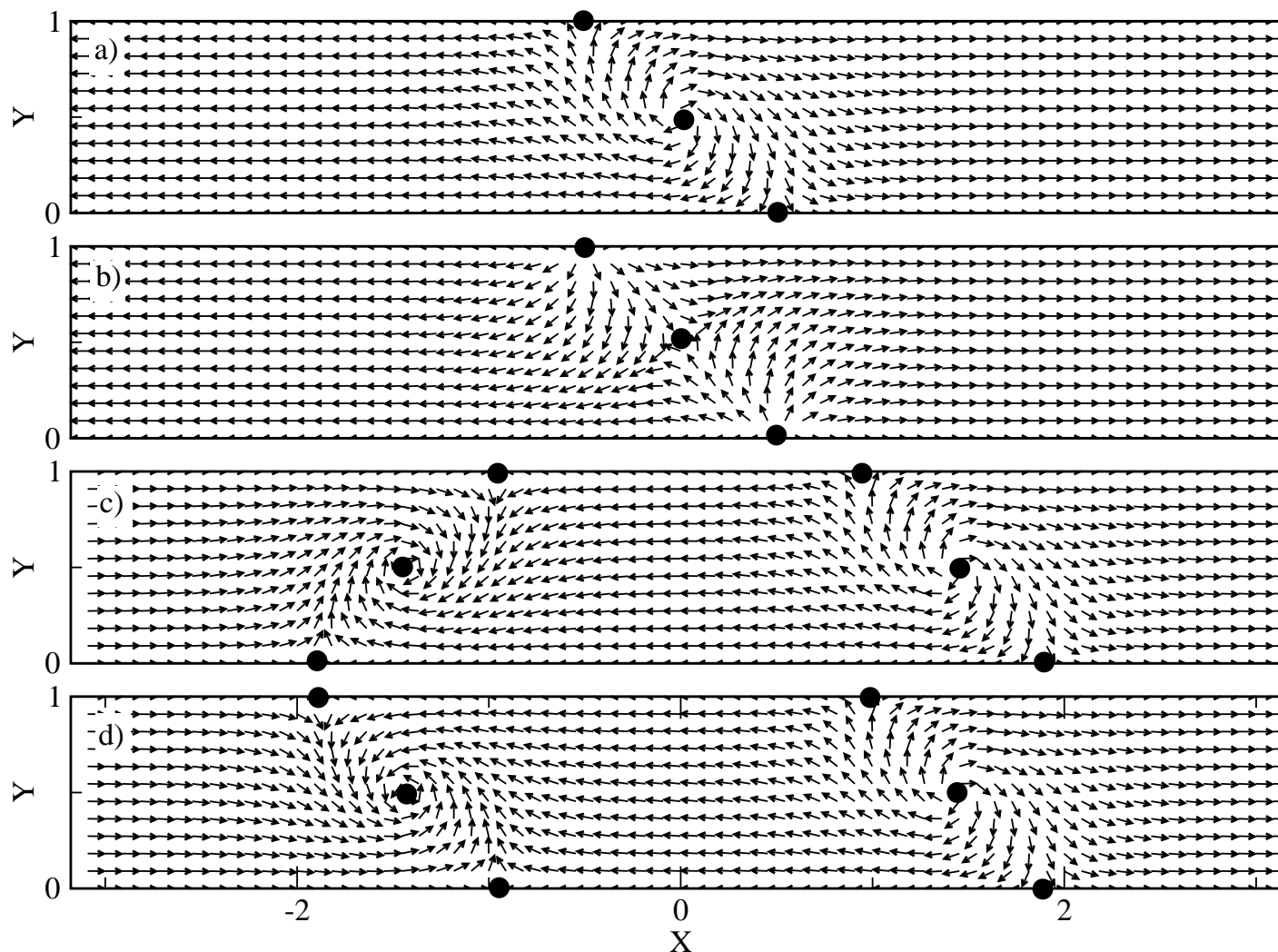
Кольцо

Трёхсвязная
область

Динамика

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная
область

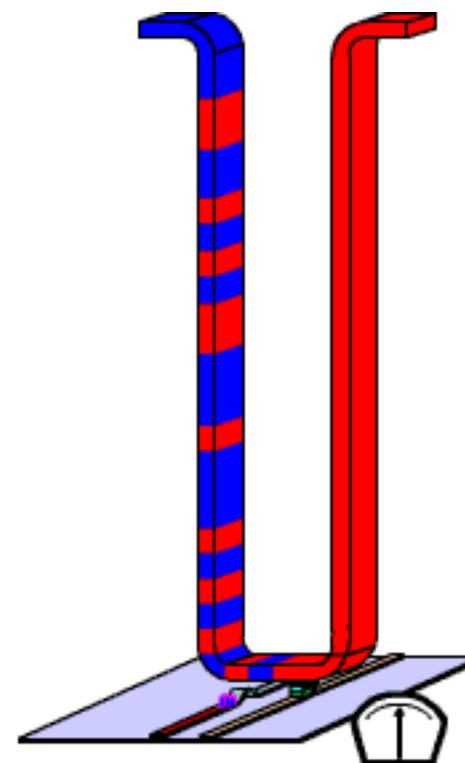
Динамика

Magnetism@home

Выводы

Задача для многих взаимодействующих доменных границ в длинной полосе возникает в связи с идеей Стюарта Паркина по созданию т.н. Racetrack magnetic memory.

S. S. P. Parkin, M. Hayashi, and L. Thomas, Science 320, 190 (2008).



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

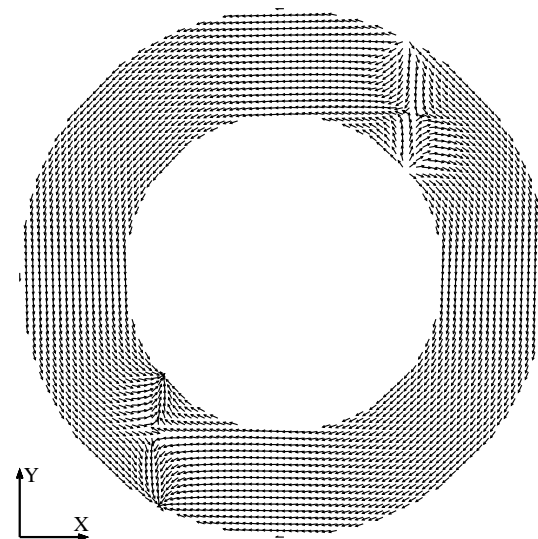
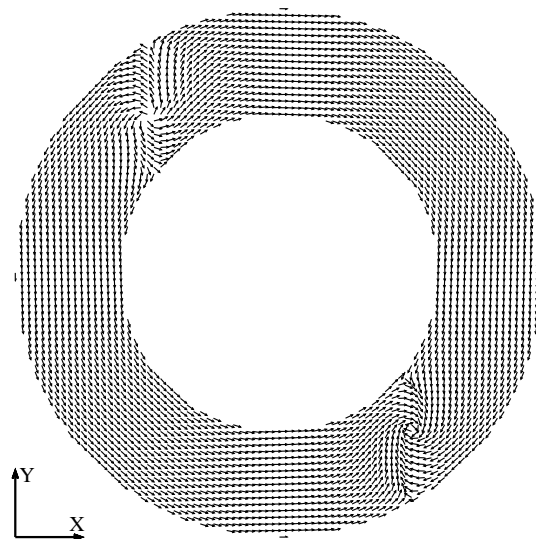
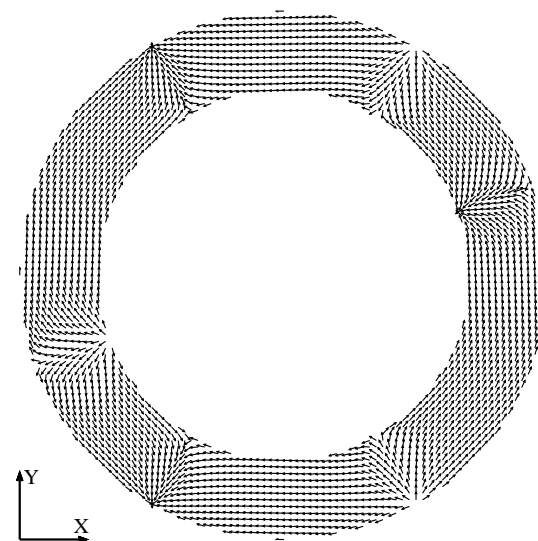
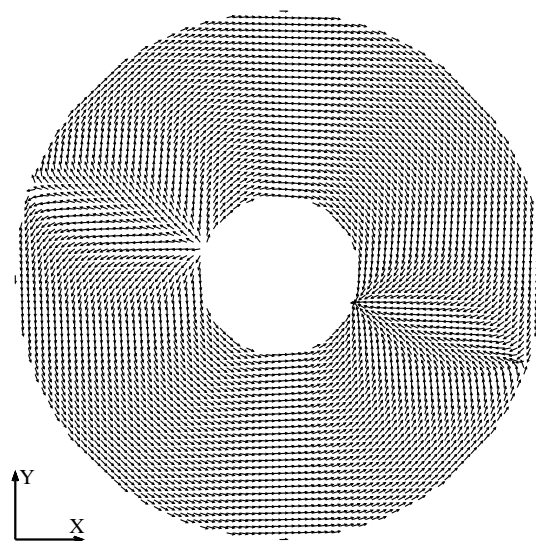
Кольцо

Трёхсвязная
область

Динамика

Magnetism@home

Выводы



Трёхсвязная область

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

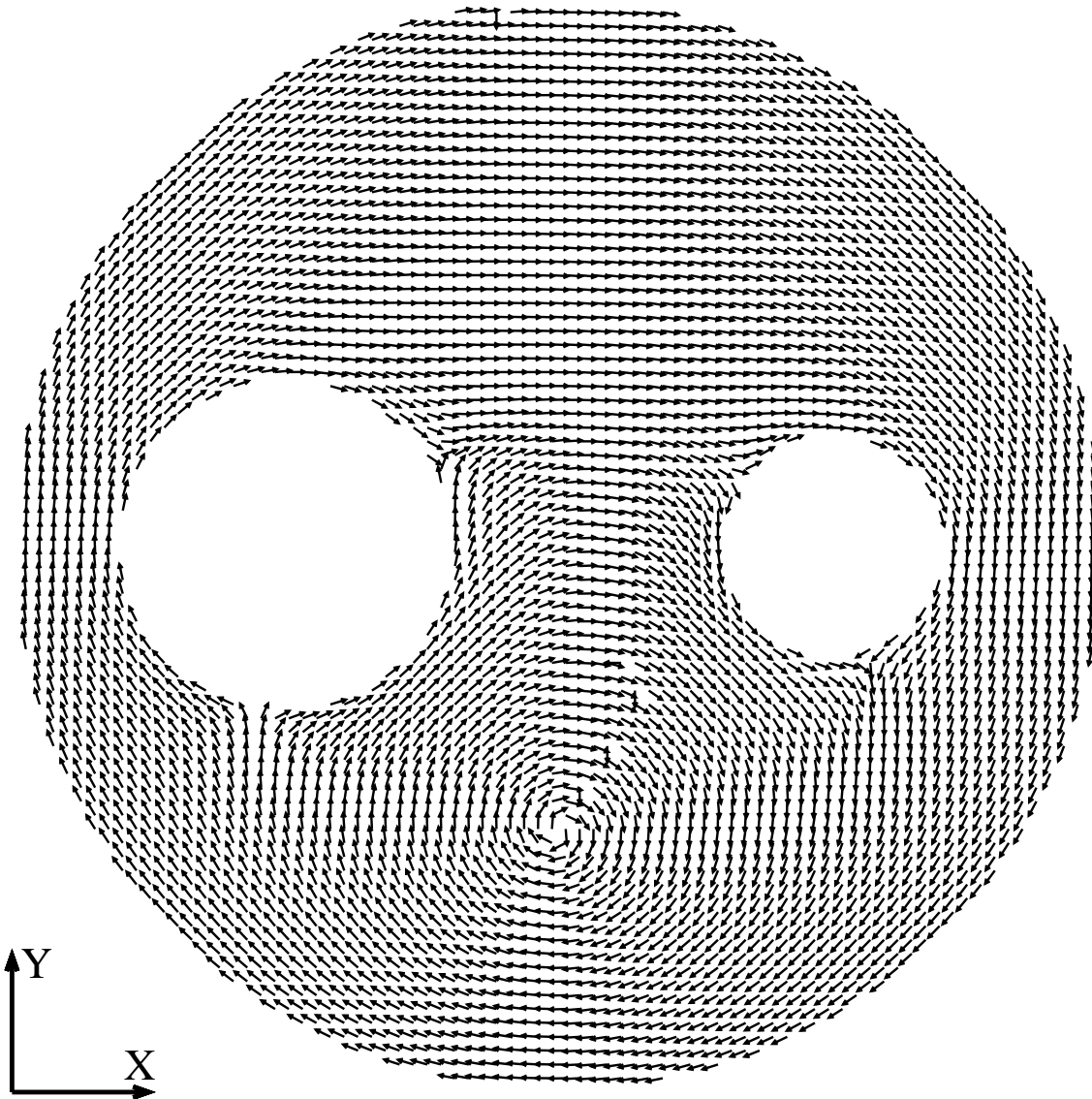
Кольцо

Трёхсвязная
область

Динамика

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

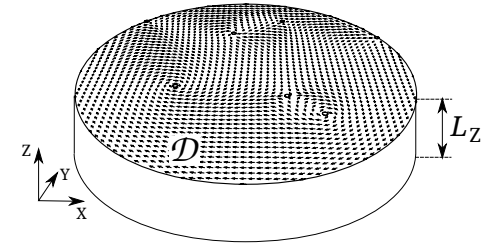
Динамика

Лагранжиан

Magnetism@home

Выводы

Динамика.



$$\tau = -\frac{M_S}{\gamma} (\cos \theta - \cos \theta_0) \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

В терминах функций комплексного переменного

$$T = \mp \frac{M_S L_Z}{\gamma} \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D'_S} \ln \frac{4 w(z, t) \bar{w}(\bar{z}, t')}{(1 + w(z, t) \bar{w}(\bar{z}, t'))^2} d^2 z \Bigg|_{t' \rightarrow t},$$

$$L(\{\dot{x}_i\}, \{x_i\}) = T(\{\dot{x}_i\}, \{x_i\}) - U(\{x_i\}),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

K.L. Metlov, Vortex mechanics in planar nanomagnets,
Phys. Rev. B 88, 014427(2013).

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Лагранжиан

Magnetism@home

Выводы

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

VOINC

Быстрый
мультипольный
метод

Первые
результаты

Выводы

Magnetism@home



Berkeley Open Infrastructure for Network Computing

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

BOINC

Быстрый
мультипольный
метод

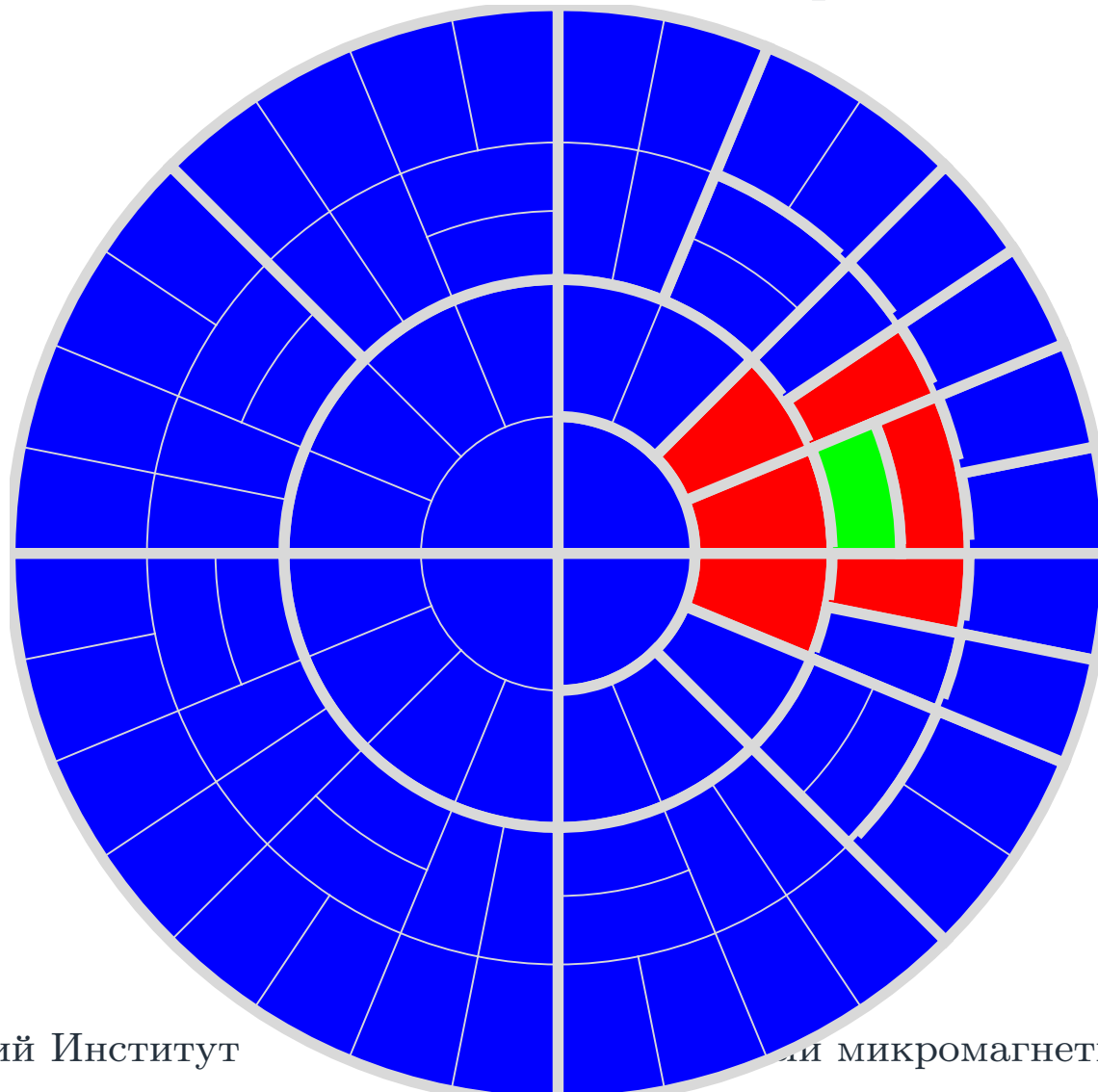
Первые
результаты

Выводы

Быстрый мультипольный метод

Rokhlin and Greengard:1987.

Один из 10-ти самых значимых алгоритмов 20-го века.



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

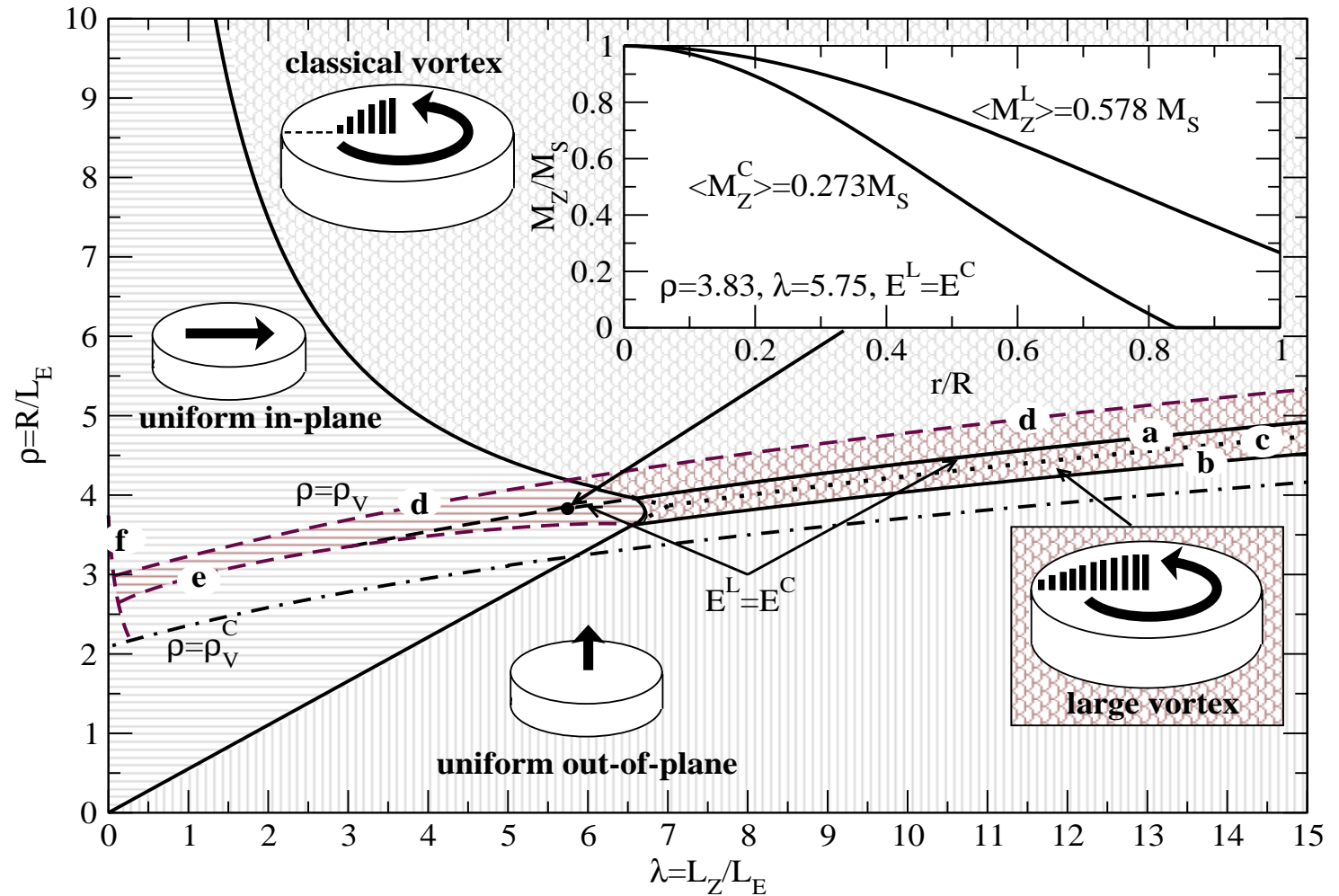
VOINC

Быстрый
мультипольный
метод

Первые
результаты

Выводы

Первые результаты



K.L. Metlov, Equilibrium large vortex state in ferromagnetic disks, JAP 113(22), 223905(2013).

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

VOINC

Быстрый мультипольный метод

Первые результаты

Выводы

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Выводы

Выводы.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Динамика

Magnetism@home

Выводы

Выводы

- Состояния планарных магнитных наноэлементов и их динамику удобно описывать при помощи функций комплексного переменного.
- Для бесконечной плёнки метастабильные состояния можно отобразить на множество рациональных функций с комплексными коэффициентами, для ограниченного наноэлемента – с действительными коэффициентами.
- Для многосвязных областей существует топологическая связь между количеством и положениями вихрей и антивихрей.
- <http://www.fti.dn.ua/magnetism>